

POLITECHNIKA LUBELSKA

Kazimierz Bonetyński

**LABORATORIUM Z MECHANIKI
CIECZY I GAZÓW**

Lublin, 1987

SPIS TREŚCI

Wstęp	5
Wykaz ważniejszych oznaczeń	5
1. Założenia dydaktyczno-wychowawcze do ćwiczeń laboratoryjnych z Mechaniki Cieczy i Gazów – Część II	7
1.1. Cele ćwiczeń laboratoryjnych	7
1.2. Regulamin ćwiczeń	7
1.3. Ogólne zasady bezpieczeństwa pracy	8
2. Praca doświadczalna	10
2.1. Planowanie pomiarów	10
2.2. Obiektywizm i błędy pomiarów	11
2.3. Realizacja doświadczeń	12
2.4. Opracowanie wyników z pomiarów	13
2.5. Opracowanie sprawozdań z badań	19
3. Instrukcje do ćwiczeń laboratoryjnych	21
3.1. Przepływ cieczy w lewarach o małych przekrojach	21
3.2. Wypływ cieczy przez przystawki	27
3.3. Kawitacja na zwężeniu rury	35
3.4. Dynamiczne działanie strumienia	40
3.5. Ruch nieustalony w przewodach pod ciśnieniem	46
3.6. Ruch cieczy w korytach otwartych	52
3.7. Odskok hydrauliczny	57
3.8. Przepływ cieczy w korycie Venturiego	62
3.9. Przepływ cieczy przez przelewy	66
3.10. Ruch cieczy w osrodku porowatym	72
3.11. Wyznaczanie prędkości średniej przepływu powietrza w przewodach wentylacyjnych	79
4. Tablice pomocnicze	86
5. Literatura	91

WSTĘP

Poznanie zjawisk przepływowo-ych zachodzących w rozmaitych układach przewodów i urządzeniach sanitarnych wymaga dla ich łatwiejszego zrozumienia podczas studiów, również wykonania badań laboratoryjnych.

Często z pozoru zawite od strony teoretycznej zjawiska stają się zrozumiałe, po doświadczalnym zapoznaniu się z ich przebiegiem. Osobista obserwacja przebiegu zjawiska, potwierdzenie zgodności otrzymanych wyników z teorią jest najlepszą metodą poznania i rozbudzenia wyobraźni twórczej.

Zagadnienia wchodzące w zakres ćwiczeń laboratoryjnych stanowią istotną część wiedzy potrzebnej współczesnemu inżynierowi.

Niniejszy skrypt został przewidziany jako pomoc dydaktyczna dla studentów specjalności Urządzenia Sanitarne na Wydziale Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej Politechniki Lubelskiej do ćwiczeń w laboratorium z Mechaniki Cieczy i Gazów Część II.

Załączone zostały również niezbędne tabele danych fizyko-chemicznych cieczy i gazów i innych stałych matematycznych.

Zakres skryptu obejmuje ćwiczenia, które będą obecnie realizowane i dostosowane są do aktualnych możliwości bazy laboratoryjnej Wydziału.

W miarę polepszania się warunków bazy laboratoryjnej przewiduje się uruchamianie nowych i opartych o aktualny stan wiedzy i możliwości techniki ćwiczenia, tak aby ich zakres w pełni obejmował program laboratorium Część II.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A — powierzchnia,
- a — przyspieszenie,
- b — szerokość,
- C — współczynnik Che'zy,
- d — średnica,
- e — chropowatość względna,
- F — siła,
- g — przyspieszenie ziemskie,
- G — ciężar,
- h — wysokość słupa cieczy,
- i — spadek hydrauliczny,

- k — chropowatość bezwzględna,
- l — długość,
- \dot{m} — strumień masy,
- X_z — obwód zwilżony,
- p — ciśnienie bezwzględne,
- p_n — nadciśnienie,
- p_s — ciśnienie statyczne,
- p_d — ciśnienie dynamiczne,
- p_a — ciśnienie atmosferyczne,
- Δp — różnica ciśnień,
- r, R — promień, promień depresji,
- R — reakcja,
- Re — liczba Reynoldsa,
- k_f — współczynnik filtracji gruntu,
- h_p — wysokość ciśnienia,
- \bar{v} — prędkość średnia,
- \dot{v} — strumień objętości,
- ξ — współczynnik straty miejscowej,
- R_h — promień hydrauliczny,
- η — lepkość dynamiczna,
- ν — lepkość kinetyczna,
- λ — współczynnik tarcia na długości,
- ρ — gęstość,
- α — współczynnik Saint – Venanta, Coriolisa,
- φ — współczynnik prędkości,
- μ — współczynnik wypływu,
- V_0 — prędkość dopływowa, lokalna,
- V — objętość,
- t — temperatura w $^{\circ}\text{C}$,
- T — temperatura w K,
- τ — czas,
- β — współczynnik kontrakcji,
- d_m — średnica miarodajna ziaren gruntu,
- d_{50} — średnica przeciętna ziaren gruntu,
- k_{10} — współczynnik filtracji w temperaturze 10°C ,
- λ_t — poprawka temperaturowa.

1. ZAŁOŻENIA DYDAKTYCZNO-WYCHOWAWCZE ĆWICZEŃ LABORATORYJNYCH Z MECHANIKI CIECZY I GAZÓW – CZĘŚĆ – II

1.1. Cele ćwiczeń laboratoryjnych

Celem ćwiczeń laboratoryjnych jest

- a) wdrożenie studentów do umiejętności prowadzenia badań złożonych zjawisk przepływowych występujących w rozmaitych urządzeniach techniki sanitarnej na modelach;
- b) zapoznanie studentów z pracą modeli i prowadzeniem prac eksperymentalnych na tych modelach, które dają możliwość zbadania pracy urządzeń odpowiadających tym modelom;
- c) nabranie wprawy w uruchamianiu oddzielnych elementów składowych modelu, ustalaniu zadanego reżimu (warunków) pracy – eksploatacji i wyłączeniu z ruchu;
- d) opanowanie metod pomiarowych i umiejętności ich stosowania do rozwiązywania badanych zjawisk i wielkości;
- e) opanowanie umiejętności opracowania otrzymanych wyników oraz ich analizy;
- f) opanowanie umiejętności oceny dokładności przeprowadzonych pomiarów z matematycznego punktu widzenia ich przydatności do celów praktycznych.

1.2. Regulamin ćwiczeń

Ćwiczenia laboratoryjne wykonywane są w tzw. grupach ćwiczeniowych. Skład grupy podaje Sekcja Nauczania i Toku Studiów Dziekanatu Wydziału.

Przed przystąpieniem do pracy w laboratorium, każdy student zobowiązany jest przyjąć do wiadomości a następnie przestrzegać poniższych ustaleń realizacji ćwiczeń. Odrabiający ćwiczenia powinni mieć przygotowane wzory tabel pomiarowo-obliczeniowych sporządzonych na papierze kancelaryjnym. Sprawdzenie przygotowania studentów do ćwiczenia odbywać się będzie w formie kolokwium ustnego, bądź pisemnego przed jego rozpoczęciem.

Dopuszczone do odrabiania ćwiczeń zostaną tylko te osoby, które w trakcie kolokwium wykażą się znajomością zagadnienia od strony teoretycznej oraz sposobu realizacji doświadczenia, co najmniej w stopniu dostatecznym. Po wykonaniu zadań przewidzianych w programie, należy uzyskać potwierdzenie prowadzącego, w tabeli pomiarów oraz po przeprowadzeniu prac porządkowych zgłosić zestaw aparaturowy do sprawdzenia. Na następnych zajęciach winno być oddane sprawozdanie z poprzedniego ćwiczenia. Oddane sprawozdanie, oprócz odpowiedzi na postawione pytania w instrukcji wykonywania ćwiczenia powinno zawierać:

- krótkie wprowadzenie,
- tabele wyników pomiarów,
- niezbędne wykresy,
- opracowanie matematyczne wyników pomiarów,
- ostateczne wnioski lub inne własne uwagi i spostrzeżenia.

Szczególnie pożądanym jest umieszczenie własnego komentarza odnośnie wykonywanego ćwiczenia i uzyskanych wyników.

Zespół studencki wykonuje jedno wspólne sprawozdanie. Sprawozdanie jest podstawą do bieżącego zaliczenia danego ćwiczenia przez dany zespół. Dlatego też obowiązkiem wszystkich członków zespołu jest zapoznanie się z jego treścią. Przy zaliczaniu ćwiczenia (w formie ustnej lub pisemnej) na ocenę składają się wiadomości z danego materiału oraz ocena ze sprawozdania. Warunkiem zaliczenia ćwiczeń jest uzyskanie ocen pozytywnych z bieżących zaliczeń ćwiczeń objętych planem zajęć.

Nieobecność na zajęciach, niedopuszczenie do odrobienia lub niezaliczenia ćwiczenia pociąga za sobą w przypadkach uzasadnionych obowiązek wykonania i zaliczenia zaległego bądź zastępczego ćwiczenia w terminie dodatkowym. Przy wykonywaniu ćwiczeń należy zwrócić uwagę na dokładność wykonywania pomiarów oraz rzetelność przeprowadzonych obliczeń. Prowadzący ćwiczenia udziela konsultacji oraz niezbędnych informacji w trakcie realizacji doświadczenia.

1.3. Ogólne zasady bezpieczeństwa pracy

Studentów biorących udział w zajęciach laboratoryjnych obowiązuje przestrzeganie ogólnych przepisów BHP oraz zarządzeń i wskazówek prowadzącego zajęcia. Celem uniknięcia wypadków podczas zajęć należy przestrzegać podanych zasad:

1. Wszystkie ćwiczenia mogą być wykonywane pod bezpośrednim nadzorem prowadzącego zajęcia.
2. Studentom nie wolno włączać ani uruchamiać samodzielnie żadnych urządzeń bez wyraźnego polecenia prowadzącego zajęcia.
3. Przed pracą, obsługą urządzeń technicznych należy zapoznać się z ich budową i zasadą działania.
4. Przed uruchomieniem danego urządzenia należy upewnić się czy nie będzie to zagrażało innym studentom znajdującym się w laboratorium.
5. Po zakończonej pracy należy unieruchomić urządzenie i doprowadzić do porządku stanowisko pracy.
6. Narzędzia i przyrządy należy używać zgodnie z ich przeznaczeniem.
7. Nie należy wykonywać żadnych prac, których nie polecił prowadzący zajęcia.
8. Każdy zauważony wypadek przy pracy, albo zagrożenie zdrowia lub życia ludzkiego należy zgłosić prowadzącemu zajęcia. Skaleczenie lub nawet drobne zadrapanie należy opatrzyć przy pomocy środków opatrunkowych znajdujących się w apteczce.

9. Studenci znajdujący się na terenie laboratorium podczas wypadku bezwzględnie stosować się muszą do poleceń prowadzącego zajęcia.
10. Studenci zobowiązani są do bezwzględnego przestrzegania zasad BHP podanych w formie instruktarzu przez prowadzącego zajęcia na pierwszych zajęciach laboratoryjnych.
11. Przyjęcie do wiadomości i przestrzeganie wymogów odnośnie postępowania studentów w zakresie BHP, każdy student potwierdza własnoręcznym podpisem w odpowiedniej książce szkolenia BHP.

2. PRACA DOŚWIADCZALNA

„Doświadczenie służy dwu celom, często niezależnym wzajemnie od siebie: pozwala zaobserwować nowe fakty aż do tej chwili nieprzewidziane, albo też niedostatecznie ustalone; ono stwierdza, czy hipoteza robocza zgodna jest ze światem zjawisk dających się zaobserwować.”

Rene J. Dubos

2.1. Planowanie pomiarów

D o ś w i a d c z e n i e jest to celowe działanie, prowadzące do uzyskania informacji o interesujących badacza zjawiskach. Informacja ta może mieć charakter jakościowy i może dotyczyć pojedynczego zjawiska lub związku między zjawiskami.

W naukach technicznych, a w szczególności w mechanice płynów ważące znaczenie przywiązuje się do informacji ilościowej.

I n f o r m a c j a i l o ś c i o w a, to określenie zjawisk – faktów za pomocą liczb. Im krótszy opis, a więcej liczb – tym lepiej. Językiem nauki są definicje wielkości, których miarą są liczby lub postacię graficzne zwane wykresami. Informacje o charakterze doświadczalnym uzyskujemy za pomocą pomiarów.

P o m i a r e m nazywamy czynności związane z ustaleniem wartości liczbowej miary danej wielkości fizycznej. Szczególną cechą pewnych wielkości mierzonych jest to, że możemy je zmieniać w sposób celowy i kontrolowany w przyjętym zakresie zmian. W tej sytuacji powstaje zagadnienie racjonalnego uporządkowania kolejności zmian wartości badanych, a więc odpowiedniego planowania pomiarów. Pierwszym krokiem przy planowaniu pomiarów powinno być powzięcie decyzji co do rodzaju zdarzenia – faktu – zjawiska i co do natury wielkości zmiennych, które według posiadanych już wiadomości mogą być istotne.

Zmiennymi istotnymi są te, o których wiemy, że decydują o przebiegu zjawiska. Zmienne istotne można podzielić na kontrolowane i niekontrolowane. Zmienne istotne mierzymy w czasie wykonywania doświadczenia (tj. takie, których wartości mogą być dobierane przez eksperymentatora), oraz takie które kontrolowane być nie mogą. W doświadczeniu staramy się ich nie zmieniać w trakcie pomiaru.

Zmiennymi nieistotnymi nazywamy, te wszystkie czynniki, które choć w drobny, czasami niezauważalny sposób wpływają na wyniki doświadczenia. Wpływ każdej z tych zmiennych jest nieznaną i może być ich bardzo dużo. Są wśród nich takie, które znamy i są nieznanne.

Tak więc, chcąc racjonalnie planować pomiary należy:

- rozpocząć od postawienia rzeczowej hipotezy,
- program badań ustalać w miarę możliwości krytycznie,
- badania rozpoczynać od modeli wyidealizowanych,
- wykonywać pomiary porównawcze badanych wielkości,
- starać się zapewnić losowy wybór próby.

2.2. Obiektywizm i błędy pomiarów

Obiektywizm wykonywanych pomiarów może zostać zachowany jeśli będą przestrzegane następujące zasady:

- zapewniona zostanie reprezentatywność próby,
- zapewnimy możliwość prawidłowej oceny wyników,
- unikamy tendencyjności w obiekcie badanym, eksperymentatora i aparatury pomiarowej,
- zapewnimy powtarzalność sprawdzanych wyników.

Przechodząc do zagadnienia reprezentatywności próby w statystyce wyróżnia się dwa rodzaje badań.

Badania wyczerpujące tj. takie, w których liczebność $n > 30$ i badania niewyczerpujące, gdy $n < 30$.

Jedyną metodą uzyskania reprezentatywności wyników jest zapewnienie absolutnej przypadkowości wyboru elementów populacji do próby.

Innym problemem jest zapewnienie możliwości prawidłowej oceny wyników. Oceny takiej możemy dokonać w oparciu o teorię estymacji. Tematyka oceny prawidłowej wyników rozpytrywana jest wyczerpująco we wszystkich nowych podręcznikach statystyki.

Unikanie tendencyjności w badanym obiekcie polega na takim zaprogramowaniu doświadczenia, że sam proces lub przygotowanie, nie zmieni właściwości pomiaru. Osiągnięcie takiego stanu nie zawsze jest możliwe, tam gdzie jest niemożliwe nieunikniony jest bardzo znaczny stopień niepewności.

Tendencyjność eksperymentatora wynika z osobistego zainteresowania wynikami badań. Może być spowodowana podświadomymi przyczynami. W pracach doświadczalnych z mechaniki płynów tendencyjność można wyeliminować w poważnym stopniu przez zastosowanie automatycznej rejestracji wyników i ich zapisu oraz dalszego opracowania przez maszyny cyfrowe.

Tendencyjność aparatury pomiarowej występuje wskutek powiązania badanej zmiennej z innymi. Ma to miejsce gdy warunki teoretyczne pomiaru nie są całkowicie spełnione.

Zapewnienie powtarzalności sprawdzanych wyników jest konieczne wszędzie tam, gdzie badana problematyka nie jest zbyt ściśle określona i podlega szerokim wahaniom indywidualnym. W celu wychwycenia pomyłek dokonuje się powtórzeń kontrolnych wyników badań. Każde powtórzenie próby na obiekcie badanym i kontrolnym powinno mieć zapewnioną przypadkowość i wykonywane być w sposób niezależny.

W badaniach doświadczalnych często stwierdzamy, że wykonując pomiary tej samej wielkości za pomocą tych samych przyrządów i stosując takie same czynności pomiarowe otrzymujemy w wyniku różne wartości mierzonej wielkości. Widzimy więc, że każdy pomiar obarczony jest jakimś błędem. Dążeniem jest, aby błędy pomiarów były jak najmniejsze gdyż całkowite ich wykluczenie jest niemożliwe. Ponieważ nie można błędów wykluczyć (można je tylko zmniejszyć), to zmniejszenie ich jest bardzo ważne przy ocenie prawidłowości uzyskiwanych wyników. Na powyższy temat istnieje dostępna i bogata literatura, zainteresowanych odsyła się do jej studiowania.

2.3. Realizacja doświadczeń

Realizacja ćwiczeń odbywa się w zespołach studenckich. Badania prowadzone są na modelach w postaci gotowych zestawów. Istotnym jest uświadomienie sobie przez członków zespołu, co rzeczywiście dana aparatura mierzy.

Po zapoznaniu się z aparaturą przed przystąpieniem do pomiarów zawsze powinno się przeprowadzić próbę. Próby będą spełniały swoje zadanie tylko wtedy, gdy będą przebiegały w warunkach najbliższych wykonywanemu doświadczeniu. Gdy obsługa stanowiska wymaga dużej liczby różnych manipulacji, należy wykonać zestawienie kolejności czynności i postępować według ustalonej kolejności przy każdym pomiarze. W ten sposób ustrzeżemy się zbędnych pomyłek. W trakcie pomiaru ważna jest również natychmiastowa analiza wstępna otrzymanych wyników. Podejście takie daje natychmiastową możliwość wprowadzenia odpowiedniej poprawki dalszych pomiarów, tak aby otrzymane wyniki stały się użyteczne.

Celem uniknięcia wielu błędów same pomiary należy prowadzić według pewnych zasad. Zasady te dają się streścić w kilku poniżej przedstawionych punktach:

1. przed przystąpieniem do badań należy jak najwięcej wiedzieć o badanym zjawisku lub przedmiocie badań,
2. do realizacji badań należy używać najskuteczniejszej metody badań. W praktyce metoda najskuteczniejsza nie musi być zarazem najnowocześniejszą,
3. dostosować dokładność użytych przyrządów kontrolnych do wymaganej dokładności, tak aby nie była ona za duża, bo mogą wystąpić fałszywe sygnały, jak również i nie za mała,
4. pomiary przeprowadzać w ustalonych a zatem nie zmieniających się w czasie warunkach pomiaru,
5. gdy występuje wiele zmiennych istotnych, powinno się opracować taki sposób postępowania w którym w jednej serii, bada się wpływ tylko jednej zmiennej,
6. badania przeprowadzać w miarę możliwości w warunkach jak najmniej odbiegających od rzeczywistych warunków pracy urządzenia, przyrządy miernicze zawiera-

jące elementy, które są narażone na uszkodzenia sprawdzić przed ich użyciem i po zakończeniu pomiarów.

Eksperymentator w czasie pracy powinien pracować z notatnikiem. Sposób prowadzenia notatek zależy częściowo od cech osobistych prowadzącego badania. Mimo to, są one dokumentem i powinny spełniać kilka podstawowych wymagań:

1. strony notatnika powinny być ponumerowane i tak zeszyte, aby nie wypadły,
2. zapisy powinny być datowane i trwałe, a więc nie można stosować do pisania przyrządów, które mogą być w łatwy sposób wymazane,
3. dane w notatkach powinny być wpisywane w czasie obserwacji lub pomiarów,
4. szczegółowość prowadzonych zapisów powinna być taka, by w każdej chwili można było odtworzyć przebieg badań.

2.4. Opracowanie wyników z pomiarów

Zagadnienie opracowywania wyników pomiarów obejmuje między innymi całą statystykę matematyczną, opracowanie matematyczne, obliczenia numeryczne i wiele innych zagadnień. Z tego względu poruszony problem zostanie ograniczony do wiadomości podstawowych potrzebnych w odrabianych ćwiczeniach.

2.4.1. Statystyczne opracowanie wyników

Błędy przypadkowe są jedną z głównych przyczyn rozrzutu wartości mierzonych. Wielkość tego rozrzutu można ocenić wieloma sposobami.

Za miarę rozproszenia „R” badanej cechy zmienności wielkości x możemy przyjąć długość przedziału zmienności $[x_{\min}, x_{\max}]$ badanej cechy, czyli liczbę

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (2.4.1.)$$

Długość przedziału zmienności, zależy tylko od wartości skrajnych badanej cechy, które nie są wartościami charakterystycznymi badanej cechy, lecz orientują nas jak bardzo rozrzucone są wartości mierzone.

Przykład

Trzy niezależne zespoły studenckie wyznaczały na drodze eksperymentalnej wartość współczynnika wydatku przystawki μ i otrzymały następujące rezultaty:

- | | | |
|----------|---------|--------------------------------|
| Zespół I | – μ | (0,65; 0,65; 0,65; 0,65; 0,65) |
| II | – μ | (0,60; 0,61; 0,62; 0,63; 0,64) |
| III | – μ | (0,58; 0,50; 0,60; 0,61; 0,68) |

Należy określić długość przedziału zmienności R współczynnika wydatku przystawki μ .

Rozwiązanie

Odpowiednio dla każdego z zespołów otrzymamy:

$$R_I = 0,65 - 0,65 = 0,00$$

$$R_{II} = 0,64 - 0,60 = 0,04$$

$$R_{III} = 0,68 - 0,58 = 0,10$$

Powyższy przykład pokazuje nam, że długość przedziału zmienności nie jest reprezentatywnym wskaźnikiem rozrzutu pomiarów.

Niejednokrotnie przy ocenie rozproszenia wygodniej jest posłużyć się średnim kwadratem odchyłeń – w a r i a n c j ą.

W a r i a n c j ą nazywamy sumę kwadratów odchyłeń poszczególnych pomiarów od wartości średniej; podzieloną przez liczbę pomiarów.

Wariancja zdefiniowana została zależnością

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (2.4.2)$$

Powyższa zależność umożliwi nam dokonanie porównania rozproszenia prób o różnych liczebnościach, ale nie jesteśmy w stanie się dowiedzieć jak bardzo są rozproszone poszczególne elementy w stosunku do wartości średniej.

Tak więc za miarę rozproszenia przyjmuje się pierwiastek kwadratowy z wariancji, który nazywany jest o d c h y l e n i e m s t a n d a r d o w y m.

Oznaczając odchylenie standardowe przez σ mamy

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (2.4.3)$$

Bardzo ważnym czynnikiem w analizie wyników pomiarów jest średni błąd kwadratowy \bar{s}_x . Wartość jego obliczać można dla pomiarów o jednakowej dokładności z wyrażenia

$$\bar{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4.4)$$

Dla wielkości z nie podlegającej bezpośrednim pomiarom i istnieniu zależności funkcyjnej

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_1) \quad (2.4.5)$$

w której wartość x_k ($k = 1, 2, 3 \dots \dots \dots, i$) można uzyskać za pomocą pomiaru, średni błąd kwadratowy, \bar{z} wartości średniej "z" obliczymy z zależności

$$\bar{z} = \sqrt{\sum_{k=1}^i S^2 \bar{X}_k f x_k (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \dots \dots \bar{x}_k)} \quad (2.4.6)$$

Do oceny dokładności pomiarów najbardziej potrzebne są: odchylenie standardowe i średni błąd kwadratowy średniej.

Długość przedziału zmienności R należy stosować głównie we wstępnych analizach pomiarowych.

Jeżeli wielkość fizyczna (z), której wielkość liczbową określamy za pomocą funkcji wielu zmiennych jest

$$z = f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n) \quad (2.4.7)$$

określoną i ciągłą wraz z pochodnymi cząstkowymi w badanych punktach i ich otoczeniu to wartość bezwzględną przyrostu funkcji możemy obliczać ze wzoru:

$$\Delta = |\Delta z| = \left| \frac{\delta z}{\delta x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\delta z}{\delta x_2} \right| \Delta x_2 + \left| \frac{\delta z}{\delta x_3} \right| \Delta x_3 + \dots + \left| \frac{\delta z}{\delta x_n} \right| \Delta x_n \quad (2.4.8)$$

Przykład

Mamy funkcję:

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2}{(x_n)^2}$$

z pomiarów otrzymaliśmy:

$$x_1 = 1,0 \pm 0,1; \quad x_2 = 2,0 \pm 0,1; \quad x_n = 3,0 \pm 0,2$$

Wyznaczyć błędy funkcji.

Rozwiązanie

Podstawiając odpowiednie wartości funkcji otrzymujemy:

$$z(1, 2, 3) = \frac{1 \cdot 2}{9} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Maksymalny błąd bezwzględny obliczamy korzystając ze wzoru:



$$\Delta z = \left| \frac{\delta z}{\delta x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\delta z}{\delta x_2} \right| \Delta x_2 + \left| \frac{\delta z}{\delta x_n} \right| \Delta x_n$$

$$\frac{\delta z(x_1, x_2, x_n)}{\delta x_1} = \frac{x_2}{(x_n)^2} \frac{\delta z(1, 2, 3)}{\delta x_1} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\delta z(x_1, x_2, x_n)}{\delta x_2} = \frac{x_1}{(x_n)^2} \frac{\delta z(1, 2, 3)}{\delta x_2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\delta z(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_n} = \frac{-2x_1 x_2}{(x_n)^3} \frac{\delta z(1, 2, 3)}{\delta x_n} = -\frac{2}{27}$$

oraz $\Delta x_1 = 0,1$; $\Delta x_2 = 0,1$; $\Delta x_n = 0,2$

zatem

$$\Delta = \frac{2}{9} \cdot 0,1 + \frac{1}{9} \cdot 0,1 + \frac{2}{27} \cdot 0,2 = 0,041$$

Mamy więc

$$z = 0,33 \pm 0,041$$

Maksymalny błąd względny wynosi:

$$\delta = \frac{0,041}{0,33} = 0,124$$

a maksymalny błąd procentowy.

$$\delta_p = 12,4\%$$

Ekstymacja przedziałowa

Prowadząc badania często zastanawiamy się jak wielki musi być przedział dookoła średniej wartości wyniku pomiaru x , aby prawdopodobieństwo tego, że wartość oczekiwana populacji mieści się w tym przedziale, tzn., że zachodzi nierówność:

$$\bar{x} - \Delta x < E(x) < \bar{x} + \Delta x \quad (2.4.9)$$

miało zadaną wartość p . Określony w ten sposób przedział nazywa się przedziałem ufności a zadaną wartość prawdopodobieństwa – poziomem ufności.

Chcąc określić przedział ufności dla wartości średniej \bar{x} otrzymujemy w wyniku n pomiarów należących do populacji o znanej wartości odchylenia standardowego $\sigma(x)$, wielkość przedziału najlepiej jest wyrazić przez średni błąd wartości średniej:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \quad (2.4.10)$$

przyjmując $\Delta x = k \sigma_x$

gdzie: k – wartość zależna od przyjętego poziomu ufności
napiszemy

$$\Delta x = k \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \quad (2.4.11)$$

Korelacja i regresja

Korelacja danych, otrzymanych w wyniku eksperymentu i naniesionych na wykres, polega na stwierdzeniu czy istnieje funkcyjna zależność między zmiennymi oraz z jakim prawdopodobieństwem możemy przyjąć, że stwierdzenie jest prawdziwe.

Regresja precyzuje charakter stosunku między zmiennymi wzajemnie ze sobą skorelowanymi.

Miarę zależności między różnymi wielkościami charakteryzuje współczynnik korelacji. W praktyce pomiarowej najczęściej mamy do czynienia z korelacją liniową dwóch zmiennych, wyznaczoną za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

W praktyce laboratoryjnej bardzo często mamy do czynienia z poszukiwaniem zależności pomiędzy dwiema zmiennymi. Oznaczając pary zmiennych przez x_i, y_i możemy w przypadku liniowej zależności napisać:

$$y = a + bx \quad (2.4.12)$$

Występujące w równaniu stałe a i b znajdujemy w przybliżeniu z próbki losowej. Wykonujemy w tym celu serię niezależnych pomiarów zależności pomiędzy zmiennymi, wyniki zestawiamy w tabelce,

x	x_1	x_2	x_3	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_n

a następnie tworzymy wyrażenie

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = n \cdot \sigma^2 \quad (2.4.13)$$

i traktujemy je jak funkcje o dwóch zmiennych rzeczywistych a i b, czyli napiszemy, że

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (2.4.14)$$

Następnie szukamy minimum funkcji względem a i b, wykorzystując w tym celu warunek istnienia ekstremum tj.

$$\frac{\delta f}{\delta a} = 0 \quad i \quad \frac{\delta f}{\delta b} = 0 \quad (2.4.15)$$

Obliczając pochodne cząstkowe otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) (-1) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) (-x_i) = 0 \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Następnie rozwiązując układ równań, obliczymy wartości a i b odpowiadające merodzie najmniejszych kwadratów z zależności

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (2.4.17)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4.18)$$

gdzie:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Przy opracowywaniu wyników z pomiarów naniesionych na wykresie nie zawsze jest wiadomo, czy poprowadzenie prostej wyznaczonej metodą najmniejszych kwadratów jest słuszne. W tym przypadku korzystnie jest posłużyć się współczynnikiem korelacji.

Współczynnik korelacji ma następujące własności:

$$-1 \leq r(X, Y) < 1 \quad (2.4.19)$$

Jeżeli zmienne X i Y są niezależne, to $r(X, Y) = 0$ oraz $r(X, Y) = -1$ lub $r(X, Y) = 1$ gdy te zmienne są liniowo zależne.

Dowód podanej zależności został wyczerpująco opisany w podręcznikach np [12]. Współczynnik ten dla regresji liniowej oblicza się z zależności

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (2.4.20)$$

Reasumując powiemy, że między zmiennymi nie ma korelacji gdy $r = 0$, jest funkcyjna gdy $r = |1|$.

2.5. Opracowanie sprawozdań z badań

W opracowaniu porządane jest podzielenie tekstu na rozdziały i opatrzenie je w tytuły, a niekiedy również i podrozdziały.

Każda z wymienionych części tekstu powinna zawierać jednolitą treściowo część materiału.

Podział tekstu powinien być taki, aby łączył w sobie zwięzłość prezentowanego materiału z jasnością i oszczędnością miejsca oraz był wyczerpującym opisem.

Tekst tytułu rozdziału i podrozdziałów należy opracować bardzo starannie, dążąc do jego skrócenia i jednoczesnego zwiększenia zawartej w nim informacji.

Wstęp — powinien stanowić uzupełnienie tytułu opracowania a nie być jego powtórzeniem. Powinien służyć do wprowadzenia czytelnika w treść sprawozdania.

metoda — metodę pomiaru należałoby tak dokładnie opisać, żeby umożliwić innym jej odtworzenie. Opis metody powinien umożliwić ocenę metody. W opisie badań, podać informacje odnoszące się do czynników zmiennych mogących mieć wpływ na wynik itd. Szczególnie dokładnie opisać wzorce użyte w pomiarach.

dane liczbowe — wyniki podajemy rzeczywiste i w kolejności lub zestawione w grupy odpowiadające poszczególnym wartościom wybranej wielkości mierzonej. Należy przy tym określić miarę rozrzutu i podać jego wartości. Na ogół najlepszym rozwiązaniem jest zestawienie danych w tablicy uzupełnionej w razie potrzeby wykresem.

Wykresy powinny zawierać co najwyżej kilka krzywych, łatwych do odróżnienia. Na wykresach należy zawsze oznaczyć punkty odpowiadające wynikom pomiarów oraz zastosowane podziałki.

r y s u n k i — powinny składać się z wyraźnych linii i punktów.

w z o r y — wszystkie wzory, na które powołujemy się w tekście powinny być ponumerowane. Znaczenie wszystkich użytych symboli we wzorach należy wyraźnie podać. Jeżeli w wyrażeniach algebraicznych występują stałe to należy podać ich wartości.

w n i o s k i — ostateczne wnioski powinny być poparte przejrzystym wywodem wiążącym je bezpośrednio z wynikami badań.

b i b l i o g r a f i a — podać możliwie najpełniej bibliografię zagadnienia, aby umożliwić czytelnikowi zapoznanie się z jego tłem historycznym i poprzednimi próbami rozwiązania problemu podjętego w ćwiczeniu.